Feladat 1. Legyen $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ egy csoportok közötti leképezés. Igazolja, hogy φ akkor és csak akkor homomorfizmus, ha *gráfja/grafikonja*, vagyis

$$\{g, g\varphi : g \in G\} \subseteq G \times H,$$

részcsoportja a $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ csoportnak.

Megoldás: Ha φ homomorfizmus, akkor a gráf tetszőleges $(g_1, g_1\varphi)$ és $(g_2, g_2\varphi)$ elemére $(g_1, g_1\varphi)(g_2, g_2\varphi) = (g_1g_2, g_1\varphi \cdot g_2\varphi) = (g_1g_2, (g_1g_2)\varphi)$, és $(g_1, g_1\varphi)^{-1} = (g_1^{-1}, (g_1\varphi)^{-1}) = (g_1^{-1}, (g_1^{-1})\varphi)$ is elemei a gráfnak, tehát a gráf részcsoport.

Ha a gráf részcsoport, akkor minden $g_1, g_2 \in G$ esetén $(g_1g_2, g_1\varphi \cdot g_2\varphi) = (g_1, g_1\varphi)(g_2, g_2\varphi)$ eleme a gráfnak, tehát $g_1\varphi \cdot g_2\varphi$ a g_1g_2-nek a φ melletti képe. Így φ homomorfizmus.

Feladat 2. Felbontható-e nemtriviális csoportok direkt szorzatára a $\mathbf{D}_5$ csoport?

Megoldás: Mivel $\mathbf{D}_5$ rendje 10, nemtriviális direkt szorzatként csak úgy állhat elő, ha az egyik tényező 2, a másik pedig 5 rendű. De mind a 2, mind az 5 rendű csoportok ciklikusak és így kommutatívak, ezért direkt szorzatuk is kommutatív. Tehát $\mathbf{D}_5$ direkt felbonthatatlan.

Feladat 3. Tekintsük a következő műveletttáblával megadott csoportot:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	3	2	5	14	12	0	11	15	13	4	6	17	16	9	1	10	8	7
1	2	3	14	5	13	1	15	11	12	8	7	10	9	16	0	17	4	6
2	5	14	1	0	9	2	10	17	16	13	15	6	4	8	3	7	12	11
3	14	5	0	1	16	3	17	10	9	12	11	7	8	4	2	6	13	15
4	15	13	17	16	1	4	0	9	10	11	12	8	7	3	6	2	5	14
5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
6	13	15	16	17	10	6	9	0	1	5	14	2	3	7	4	8	11	12
7	12	11	9	10	17	7	16	1	0	14	5	3	2	6	8	4	15	13
8	11	12	10	9	0	8	1	16	17	15	13	4	6	2	7	3	14	5
9	7	8	11	12	14	9	5	13	15	6	4	16	17	0	10	1	2	3
10	8	7	12	11	15	10	13	5	14	2	3	1	0	17	9	16	6	4
11	9	10	8	7	6	11	4	3	2	0	1	5	14	15	12	13	17	16
12	10	9	7	8	2	12	3	4	6	17	16	13	15	14	11	5	0	1
13	17	16	6	4	3	13	2	8	7	10	9	12	11	5	15	14	1	0
14	1	0	3	2	8	14	7	6	4	16	17	15	13	12	5	11	9	10
15	16	17	4	6	7	15	8	2	3	1	0	14	5	11	13	12	10	9
16	6	4	15	13	5	16	14	12	11	7	8	9	10	1	17	0	3	2
17	4	6	13	15	11	17	12	14	5	3	2	0	1	10	16	9	7	8

Keressen két részcsoportot ebben a csoportban, melyeknek a csoport (belső) direkt szorzata.

Megoldás: Használjuk a kis csoportok tábázatát. Egy 18 elemű csoport vagy egy 2 és egy 9, vagy egy 3 és egy 6 elemű csoport direkt szorzatára bontható fel. Utóbbi nem jöhet szóba, mert a 2 és a 9 rendű csoportok kommutatívak, ez a műveletttábla pedig nem az. Az egyetlen nemkommutatív hatodrendű csoport $\mathbf{S}_3$. Ezek szerint a csoportot egy $\mathbb{Z}_3$-mal és egy $\mathbf{S}_3$-mal izomorf részcsoport szorzatára lehet felbonthatni (ha egyáltalán direkt felbontható).

Az $\mathbf{S}_3$-nak három másodrendű eleme van, éppen annyi, amennyi a művelettáblában szerepel. Így az $\mathbf{S}_3$-mal izomorf tényező tartalmazza ezt a három elemet (11, 13, 14). Az ezek által generált részcsoport ($\{5, 11, 12, 13, 14, 15\}$) valóban hatodrendű, nemkommutatív (így $\mathbf{S}_3$-mal izomorf), és normálosztó is (a részcsoport egy generátorrendszere $\{11, 12\}$, az egész csoporté $\{0, 11, 12\}$), így elég leellenőzizni, hogy a 11 és a 12 konjugáltjai 0-val, $2 \cdot 11 \cdot 0 = 13$ és $2 \cdot 12 \cdot 0 = 15$, benne vannak a részcsoportban.

Szükségünk van még a másik tényezőre. Ennek egy $\mathbb{Z}_3$-mal izomorf részcsoportnak kell lennie, aminek metszete az első tényezővel triviális. Ennyi elég is, a 4.6 Tétel (4) pontja és a 3. feladatsor 1. feladata alapján.

A csoportban nyolc harmadrendű elem, és így négy $\mathbb{Z}_3$-mal izomorf részcsoport van. Ezek közül három lesz jó: $\{1, 3, 5\}$, $\{5, 6, 9\}$, és $\{5, 8, 17\}$.

Feladat 4. Hány részcsoportja van $\mathbb{Z}_4^2$-nek? Hány részcsoportja van $\mathbb{Z}_4^2$-nek izomorfia erejéig?

Megoldás: A kis csoportok táblázatából (vagy a véges Abel-csoportok alaptételéből) kiderül, hogy izomorfia erejéig 6 darab részcsoport lesz:

- triviális részcsoport: 1 példány,
- $\mathbb{Z}_2$: mivel $\mathbb{Z}_4^2$-ben három másodrendű elem van (02, 20, és 22), ilyenből 3 példány van,
- $\mathbb{Z}_4$: mivel $\mathbb{Z}_4^2$-ben 12 negyedrendű elem van, és egy $\mathbb{Z}_4$-gyel izomorf csoportot két negyedrendű elem generál, ilyenből 6 példány van,
- $\mathbf{V}$: $\mathbf{V}$-ben az egységelem mellett három másodrendű van, éppen annyi, amennyi másodrendű van $\mathbb{Z}_4^2$-ben. Ezek ténylegesen $\mathbf{V}$-vel izomorf részcsoportot generálnak, tehát itt 1 részcsoport adódik ({00,02,20,22}).
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$: Mivelez a csoport három másodrendű elemet tartalmaz, az ezzel izomorf részcsoportoknak tartalmaznia kell a $00, 02, 20, 22$ elemeket. A negyedrendű elemek közül akármelyeket tesszük be, be kell tenni az elem 02-vel, 20-val, 22-vel való összegét is. A negyedrendű elem akármelyik választása mellett így részcsoport adódik, és mindegyik részcsoport négyféleképpen jön ki ilyen módon. Újabb 3 példány. Ezek: $\{(x, y) \in \mathbb{Z}_4^2 : 2 \mid x\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{Z}_4^2 : 2 \mid y\}$, és $\{(x, y) \in \mathbb{Z}_4^2 : 2 \mid x + y\}$.
- Teljes részcsoport: 1 példány.

Összesen 15 részcsoport.

Feladat 5. Hány automorfizmusa van $\mathbb{Z}_4^2$-nek?

Megoldás: Mivel $[10, 01] = \mathbb{Z}_4^2$, az 10 és a 01 képe meghatározza a $\mathbb{Z}_4^2$ tetszőleges φ endomorfizmusát. Legyen $10\varphi = (a, b)$, $01\varphi = (c, d)$. Ekkor minden $x, y \in \mathbb{Z}_4$ esetén

$$(x, y)\varphi = (x \cdot 10 + y \cdot 01)\varphi = x \cdot 10\varphi + y \cdot 01\varphi = (ax + cy, bx + dy) = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ez a leképezés valóban homomorfizmus minden a, b, c, d esetén, hiszen

$$((x_1, y_1) + (x_2, y_2))\varphi = ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$
$$(x_1, y_1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (x_2, y_2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (x_1, y_1)\varphi + (x_2, y_2)\varphi.$$

Ebből rögtön adódik, hogy a $\mathbb{Z}_4^2$-nek $4^4 = 256$ endomorfizmusa van.

Meg kell nézni, hogy ezek közül hány bijektív. Egy véges csoport endomorfizmusa akkor és csak akkor bikejtív, ha injektív, tehát ha a magja triviális. Az tehát a kérdés, hogy mely $\mathbb{Z}_4$ feletti 2×2-es mátrixok esetén teljesül

$$(x, y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 00 \Rightarrow (x, y) = 00?$$

Ez pontosan akkor fog teljesülni, ha a mátrix invertálható: ha

$$(x, y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 00$$

és $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertálható, akkor inverzével jobbról szorozva $(x, y) = 00$ adódik. Másrészt, ha az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$-vel való jobbszorzás bijektív $\mathbb{Z}_4^2$-en, akkor vannak olyan a', b', c', d' elemek, hogy $(a', b')\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 10$ és $(c', d')\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 01$. Ekkor pedig

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tehát $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertálható.

Meg kell néznünk, hogy $\mathbb{Z}_4$ fölött hány invertálható 2×2-es mátrix van. A $\mathbb{Z}_4$ nem test, felette nem akkor invertálható egy mátrix, ha a determinánsa nemnulla, hanem akkor, ha a determinánsa invertálható $\mathbb{Z}_4$-ben, vagyis páratlan.

Az $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ determináns akkor lesz páratlan, ha

- a páratlan, d paritása különbözik bc paritásától: $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 64$ eset, VAGY
- a páros, b páratlan, c páratlan: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 32$ eset.

Így $|\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_4^2)| = 96$.